Tema 4. Vectores en el espacio (Productos escalar, vectorial y mixto)

1. Espacios vectoriales

1.1. Definición de espacio vectorial

Un conjunto **E** es un espacio vectorial si en él se definen dos operaciones, una interna (suma) y otra externa (producto por números reales, **R**), cumpliendo las siguientes propiedades:

Suma

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\bar{0}$

($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in$ **E**)

Producto por números

5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$
6. $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$
7. $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})$
8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(λ, $\mu \in$ **R**)

El vector $\vec{0}$ es el neutro de la suma; $-\vec{a}$ es el opuesto de $\vec{a}$; 1 es el neutro, la unidad, del producto de números reales.
A cualquier elemento de **E** se le llama vector.

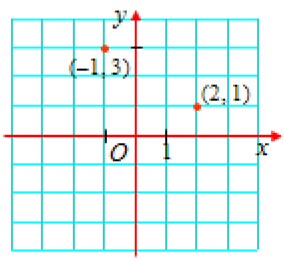
- **El espacio vectorial $\mathbf{R}^2$**

El conjunto de los puntos del plano, $\mathbf{R}^2$, es un espacio vectorial. Sus elementos son de la forma (a, b) o (a_1, a_2). Este espacio vectorial es de dimensión 2: largo y ancho. Sus puntos se representan en el plano cartesiano.

Las operaciones suma y producto por números se definen así:

Suma: $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

Producto: $\lambda(a_1,a_2)=(\lambda a_1,\lambda a_2)$



Ejemplos:

a) (5, 3) + (–2, 1) = (5 – 2, 3 + 1) = (3, 4).
b) El opuesto de (–3, 5) es –(–3, 5) = (3, –5).
c) El elemento nulo de $\mathbf{R}^2$ es (0, 0).
d) (–2, 4) + 5(3, –1) – 2(–1, 3) = (–2, 4) + (15, –5) – (–2, 6) = (15, –7).

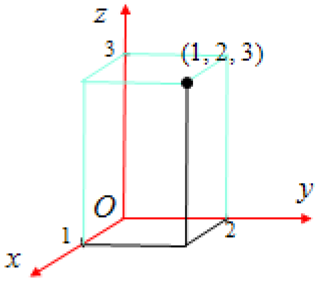
- **El espacio vectorial $\mathbf{R}^3$**

El conjunto de los puntos del espacio, $\mathbf{R}^3$, es un espacio vectorial. Sus elementos son de la forma (a, b, c) o (a_1,a_2,a_3). Este espacio vectorial es de dimensión 3: largo, ancho y alto. Sus puntos se representan en el triedro cartesiano.

Las operaciones suma y producto por números se definen así:

Suma: $(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

Producto: $\lambda(a_1,a_2,a_3)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.



Ejemplos:

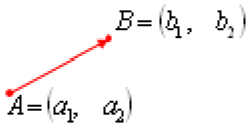
a) El elemento nulo de $\mathbf{R}^3$ es (0, 0, 0).
b) El opuesto de (–3, 2, 1) es (3, –2, –1).
c) (2, –7, 0) + 3(–1, 1, 0) – (2, –4, –5) = (2 – 3 – 2, –7 + 3 + 4, 0 + 0 + 5) = (–3, 0, 5).

<u>Observaciones:</u>
1) No es difícil demostrar que las operaciones anteriores cumplen las propiedades de espacio vectorial. En todos los casos la demostración se apoya en las propiedades de las operaciones con números reales.
2) Otros espacios vectoriales son: el conjunto de polinomios de grado 2, por ejemplo; el conjunto de matrices de dimensión 2 × 3;…
3) En general, un vector es un conjunto ordenado de números $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Los números a_1, a_2, …, a_n se llaman **componentes** o **coordenadas** del vector. El número de componentes es su **dimensión**.

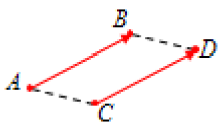
2. Vectores

2.1. Vectores fijos y vectores libres (en el plano y en el espacio)

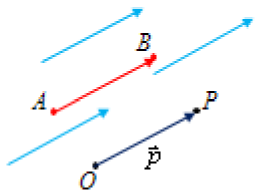
El vector que tiene por origen el punto *A* y por extremo el punto *B*, se llama vector fijo $\overrightarrow{AB}$.
– **Módulo** del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento *AB*. Se denota $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
– **Dirección** de $\overrightarrow{AB}$ es la de la recta que contiene a *A* y a *B*.
– **Sentido** de $\overrightarrow{AB}$ es el que indica el traslado de *A* a *B*.
• Dos vectores fijos son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, entonces el polígono de vértices *A*, *B*, *D* y *C* (en ese orden) es un paralelogramo.



Vector fijo de extremos *A* y *B*



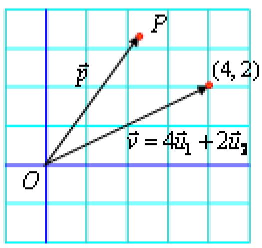
Vectores equipolentes



Vector libre $\vec{p}$. Es equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

• Se llama **vector libre** a un vector y a todos los que son equipolentes a él; esto es, todos los que se obtienen trasladándolo (paralelamente). Entre ellos tiene especial importancia el que parte del origen de coordenadas, en el punto *O*.

• **Correspondencia entre puntos y vectores**
Entre puntos de $\mathbf{R}^2$ (o de $\mathbf{R}^3$) y vectores libres del plano (o del espacio) existe una biyección:
A cada vector $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\overrightarrow{OP}$, se le asocia el punto *P*.
A cada punto *P* se le asocia el vector $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$.

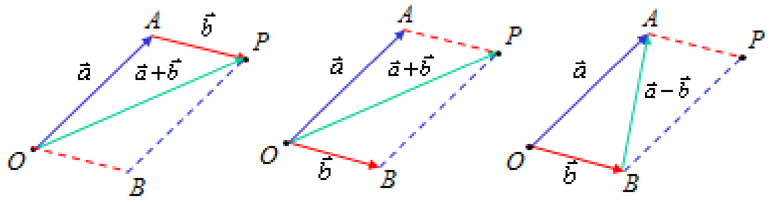


Se escribe, indistintamente, $P = (a_1, a_2)$ o $\vec{p} = (a_1, a_2)$; y $A = (a_1, a_2, a_3)$ o $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
→ El uso de la misma notación para designar puntos y vectores no debe confundir al lector. Habitualmente el contexto aclara su significado. Así, puede decirse "sea el punto (a_1, a_2, a_3)" o "sea el vector (a_1, a_2, a_3)". También suele escribirse $A(a_1, a_2, a_3)$, sin el signo igual, para designar a los puntos.

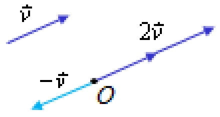
Ejemplo:
Al punto (4, 2) se le asocia el vector $\vec{v} = (4,\ 2)$. Más adelante se verá el significado de la notación $\vec{v} = 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

2.2. Operaciones con vectores libres: interpretación geométrica

Para sumar dos vectores se pone uno a continuación del otro (el origen del segundo en el extremo del primero). El vector suma tiene como origen el origen del primero, y como extremo el extremo del segundo. También puede aplicarse el esquema del paralelogramo, trasladando ambos vectores al origen.



Suma y resta de vectores



Multiplicación de un vector por un número

- **Algebraicamente**, en el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, para obtener las coordenadas de la suma o del producto se procede como se ha indicado antes.

Esto es, si: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, entonces:

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

<u>Observación:</u>

El vector $\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)$; y $\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)$.

- $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

Si $\lambda > 0$, el vector $\lambda\vec{a}$ tiene el mismo sentido que $\vec{a}$; si $\lambda < 0$, sentido contrario.

Ejemplos:

Si $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$, se tendrá:

$\vec{a} = (1, -2, 0)$; $\vec{b} = (3, -1, 4)$.

$\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b} = (1, -2, 0) - (3, -1, 4) = (-2, -1, -4)$.

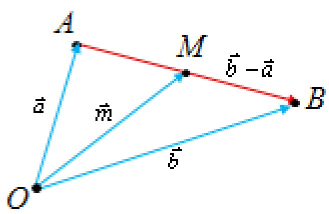
$\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a} = (3, -1, 4) - (1, -2, 0) = (2, 1, 4)$.

$2\vec{a} = 2(1, -2, 0) = (2, -4, 0)$; $-3\vec{a} = -3(1, -2, 0) = (-3, 6, 0)$.

2.3. Punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio, M, del segmento de extremos

$A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ son $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\ \dfrac{a_2+b_2}{2},\ \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$.



Como puede observarse:

$$\overline{OM}=\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{AB}\Rightarrow \vec{m}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Por tanto, M, tiene las coordenadas indicadas.

Ejemplo:

El punto medio del segmento de extremos $A(1, -2, 0)$ y $B(3, -1, 4)$ es:

$$M\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{-2-1}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)=\left(2,\ -\frac{3}{2},\ 2\right).$$

3. Dependencia e independencia lineal de vectores. Bases

3.1. Combinación lineal de vectores

Si $\vec{a}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial **E**, se dice que el vector $\vec{a}$ es combinación lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ cuando se puede escribir en función de ellos; esto es, cuando $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$, donde a_i es un número real. También se dice que $\vec{a}$ **depende linealmente** de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$.

- Los vectores $\vec{a}$ y $k\vec{a}$ son dependientes uno del otro: tienen la misma dirección; son paralelos; sus coordenadas son proporcionales.
- Al conjunto de vectores que dependen linealmente de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ se le llama **variedad lineal** engendrada por ellos. Toda variedad lineal tiene estructura de espacio vectorial. Más en concreto, toda variedad lineal es un susbespacio vectorial del espacio vectorial de referencia.

Ejemplos:

a) Si $\vec{a}$ = (1, –2, 0) y $\vec{b}$ = (3, –1, 4), todos los vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ son combinación lineal (o dependen linealmente) de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entre ellos:

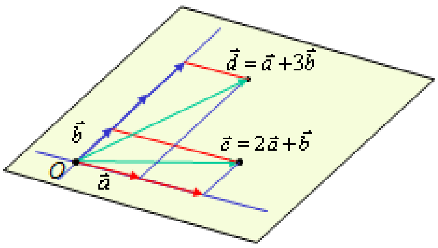
$\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ = 2(1, –2, 0) – 4(3, –1, 4) = (–10, 0, –16).

b) El conjunto de vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ es un susbespacio de $\mathbf{R}^3$. Estos vectores también se pueden escribir como $\vec{c} = \lambda(1, -2, 0) + \mu(3, -1, 4) = (\lambda + 3\mu, \quad -2\lambda - \mu, \quad 4\mu)$.

Dando valores a λ y μ se obtienen los vectores de ese subespacio. Por ejemplo, para λ = –1 y μ = 2 se obtiene

$\vec{c} = (-1 + 3 \cdot 2, \quad -2 \cdot (-1) - 2, \quad 4 \cdot 2)$ = (5, 0, 8).

(En este caso, los vectores pertenecen todos a un mismo plano, como se verá en el siguiente tema).



c) El vector $\vec{e}$ = (5, 0, 0) no depende linealmente de $\vec{a}$ = (0, –2, 1) y $\vec{b}$ = (0, 2, 1), pues la primera coordenada, 5, no puede obtenerse a partir de dos ceros, que son la primera coordenada de cada uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ son linealmente independientes.

d) Podemos preguntarnos: ¿qué valor debe tomar α para que los vectores $\vec{a}$ = (2, 1, α) y $\vec{b}$ = (4, 2, –2) tengan la misma dirección?

Como debe cumplirse que (2, 1, α) = k · (4, 2, –2) ⇒ $k = \frac{1}{2}$; luego $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$.

- Si un vector no puede ponerse como combinación lineal de otros, se dice que es **linealmente independiente** de ellos.
- En general, un **conjunto de vectores** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ es **linealmente independiente** si la igualdad $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ se cumple sólo cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Si la igualdad anterior se puede cumplir con algún $\lambda_i \neq 0$, los vectores son linealmente dependientes.

- El vector $\vec{0}$ de $\mathbf{R}^3$ es $\vec{0}$ = (0, 0, 0). Este vector depende linealmente de cualquier conjunto de vectores, pues $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + ... + 0 \cdot \vec{v}_n$.

Ejemplos:
a) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (1, 3, 2), (0, −1, 1)} es linealmente independiente, pues la igualdad $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$ solo se cumple si $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$.
Igualando las componentes se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ E3-E1 \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ E3+E2 \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

b) Los vectores del plano $\vec{a} = (1, -2)$ y $\vec{b} = (-2, 4)$ son linealmente dependientes, pues $\vec{b} = -2\vec{a}$ y, por tanto: $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

c) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, −1, −1)} es linealmente dependiente, pues la relación $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0)$ se cumple sin necesidad de que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

que es un sistema con infinitas soluciones; por ejemplo: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -1$.
Puede verse también que (1, 0, 1) = (0, 1, 2) + (1, −1, −1).

- **Rango de un conjunto de vectores** es el número de ellos que son linealmente independientes. Para la determinación del rango puede recurrirse al álgebra de matrices, combinando las transformaciones de Gauss con el cálculo de determinantes.
En el ejemplo anterior: en el caso a), el rango es 3; en el caso b), el rango es 2.

- **Criterio para determinar la dependencia o independencia lineal** de tres vectores del espacio.
Aparte del método aplicado más arriba (el planteamiento y resolución de un sistema lineal), para comprobar si tres vectores del espacio son linealmente independientes, basta con resolver el determinante formado por los tres vectores. Si ese determinante vale cero, los vectores son linealmente dependientes; en caso contrario, serán linealmente independientes.

Observación: Dado que el sistema asociado es homogéneo (véanse los ejemplos anteriores), para que sea compatible determinado, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, lo que implica que su determinante debe ser distinto de cero. Esto significa que su solución es única: la trivial. En definitiva, que los vectores son linealmente independientes.

Ejemplos:
a) Los vectores (1, 0, 1), (1, 3, 2) y (0, −1, 1) son linealmente independientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 \neq 0 \to \text{Este conjunto de vectores tiene rango 3.}$$

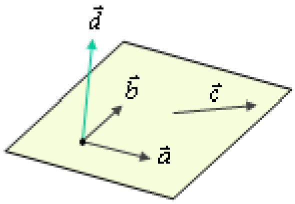
b) Los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 2) y (1, –1, –1) son linealmente dependientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Este conjunto de vectores tiene rango 2.}$$

Observación: Este mismo método puede aplicarse para vectores de dimensión dos, de dimensión 4, o de cualquier dimensión.

- **Interpretación geométrica de la dependencia lineal de vectores**.

– **En el plano:** dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; en caso contrario, serán linealmente independientes.
(Dados tres vectores del plano, siempre habrá uno que dependa de los otros dos.)
– **En el espacio**: dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; tres vectores son linealmente dependientes cuando están en el mismo plano (si son coplanarios). Tres vectores son linealmente independientes si están en planos distintos.
(Dados cuatro vectores del espacio, siempre habrá uno que dependa de los otros tres.)



3.2. Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial, **E**, es un conjunto de vectores, **B** $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$, todos de **E**, que cumple dos condiciones:
1) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes; esto es, ninguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás.
2) Cualquier vector de **E** depende linealmente del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$.

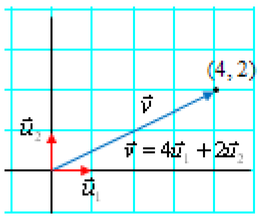
- **Bases de R²**

Dos vectores que sean linealmente independientes (no nulos y no alineados o paralelos) forman una base de **R²**. Pueden darse infinitas bases para **R²**.
Si **B** $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de **R²**, y $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, a los números a_1 y a_2 se les llama **coordenadas** (o componentes) de $\vec{a}$ respecto de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Ejemplo:
Los vectores {(1, 2), (2, –2)} forman una base de **R²**, pues ni son nulos ni paralelos.
El vector $\vec{v}$ = λ_1(1, 2) + λ_2(2, –2) tiene coordenadas (λ_1, λ_2) respecto de esa base.
Esta base no es operativa, no es clara, pues el vector que tiene, respecto de ella, por ejemplo las coordenadas (–4, 5) es $\vec{v}$ = –4(1, 2) + 5(2, –2) = (6, –18); pero decir que las coordenadas del vector (6, –18) son (–4, 5) es poco comprensible.

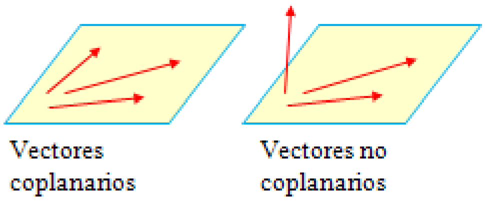
- La **base canónica**, la usual, de **R²** es **B** = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ = {(1, 0), (0, 1)}.

Esta base tiene la ventaja de que las coordenadas de un vector se obtienen directamente. Así, las coordenadas del vector $\vec{v}$ = (–4, 5) son –4 y 5, pues: $\vec{v}$ = –4(1, 0) + 5(0, 1). Del mismo modo, otro vector $\vec{v}$ = (4, 2) se puede escribir $\vec{v}$ = 4(1, 0) + 2(0, 1). Esto permite representar fácilmente un vector en el plano cartesiano.



- **Bases de $\mathbf{R}^3$**

Tres vectores que sean linealmente independientes (no nulos, no paralelos y no coplanarios) forman una base de $\mathbf{R}^3$.
Pueden darse infinitas bases para $\mathbf{R}^3$.
Si $\mathbf{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$, y $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$, a los números a_1, a_2 y a_3 se les llama coordenadas de $\vec{a}$ respecto de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.



Como se ha dicho anteriormente, para comprobar que tres vectores constituyen una base de $\mathbf{R}^3$ basta con calcular el determinante asociado y ver que es distinto de 0.

Ejemplo:

a) Los vectores (1, 0, 1), (0, 0, 2), (0, –1, 1), forman una base de $\mathbf{R}^3$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El vector $\vec{v}$ = λ_1(1, 0, 1) + λ_2(0, 0, 2) + λ_3(0, –1, 1) tiene coordenadas (λ_1, λ_2, λ_3) respecto de esa base. Esta base no es operativa, pues el vector que tiene, respecto de ella, las coordenadas (3, –1, 5) es $\vec{v}$ = 3(1, 0, 1) –1(0, 0, 2) + 5(0, –1, 1) = (3, –5, 6); pero decir que las coordenadas del vector (3, –5, 6) son (3, –1, 5) no es fácil de entender.

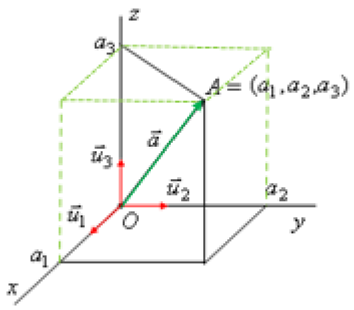
b) Para ver que los vectores $\vec{v}_1$ = (2, 1, k), $\vec{v}_2$ = (1, –2, 3) y $\vec{v}_3$ = (–k, –1, 0) constituyan una base de $\mathbf{R}^3$ hay que exigir que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -k & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -2k^2 - 4k + 6 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \neq 1$ y $k \neq -3$. Luego, los vectores dados forman una base siempre que $k \neq 1$ y –3.

- La **base canónica**, la usual, de $\mathbf{R}^3$ es **B** = $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}. Esta base es la que se utiliza por defecto, tiene la ventaja de que las coordenadas de un vector se obtienen directamente. Así, las coordenadas del vector $\vec{v}$ = (3, –1, 5) son 3, –1 y 5, pues:
  $\vec{v}$ = 3(1, 0, 0) –1(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (3, –1, 5).

- **La referencia usual en $\mathbf{R}^3$**

Es $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, siendo O el origen de coordenadas y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ los vectores de la base canónica. Así, al punto $A(a_1, a_2, a_3)$ se le asocia el vector $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$; o bien: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
Su representación gráfica se indica en la figura adjunta.
Los ejes de coordenadas suelen denotarse con las letras x, y, z; también suele hablarse de eje OX, eje OY y eje OZ.
Para el punto A dado, se tiene: $x = a_1$, $y = a_2$ y $z = a_3$.



→ Como el lector podrá comprobar fácilmente, los vectores de la base canónica, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, son unitarios (su módulo vale1) y son perpendiculares dos a dos.

4. Producto escalar de vectores

4.1. Definición y propiedades

Dados dos vectores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$ se define:

- Producto escalar ordinario: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$.
- Producto escalar canónico: $\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$.

– Ambas definiciones son equivalentes, pero la segunda es más operativa siempre que los vectores vengan dados en función de la base canónica.
– Conviene observar que el producto escalar de dos vectores es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero.
Observación: El producto escalar puede definirse, de manera análoga, para vectores de cualquier dimensión.

Ejemplo:
Si $\vec{v}$ = (2, –1, 3) y $\vec{w}$ = (4, 5, 0), su producto escalar vale:
$\vec{v} \cdot \vec{w}$ = (2, –1, 3) · (4, 5, 0) = 8 – 5 + 0 = 3.

- **Algunas propiedades**:

1. Conmutativa: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
2. Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. Para todo $\vec{v}$: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$
4. Si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

$\rightarrow$ La demostración de estas propiedades no es difícil. El lector debería intentar demostrarlas.

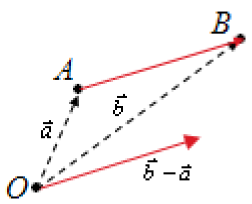
4.2. Aplicaciones del producto escalar

- El **módulo de un vector** $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$, se define así:

$$|\vec{v}| = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.$$

Ejemplo:
El módulo de los vectores $\vec{v}$ = (2, –1, 3) y $\vec{w}$ = (4, 5, 0) es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}; \qquad |\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{41}.$$



- **Distancia entre dos puntos**

La distancia entre dos puntos A y B, $d(A, B)$, es igual al módulo del vector que determinan: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$.

Si las coordenadas de esos puntos fuesen $A = (a_1, b_1, c_1)$ y $B = (a_2, b_2, c_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}.$$

Ejemplo:
Si A(1, –2, 0) y B(3, –1, 4), la distancia, $d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{21}$.
Es evidente que coincide con el módulo del vector

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1, 4) - (1, -2, 0) = (2, 1, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}.$$

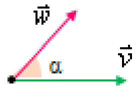
Obsérvese también que: $d(A, B) = d(B, A) = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-4)^2} = \sqrt{21}$.

- **Coseno del ángulo que forman dos vectores**

De la primera definición del producto escalar, se deduce que: $\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$.

Teniendo en cuenta la definición del producto escalar canónico, y suponiendo que $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,\ w_2,\ w_3)$, se tendrá:

$$\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}+v_3^{\ 2}}\cdot\sqrt{w_1^{\ 2}+w_2^{\ 2}+w_3^{\ 2}}}.$$

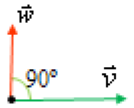


Ejemplo:
El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ = (2, −1, 3) y $\vec{w}$ = (4, 5, 0) será:

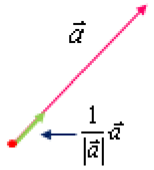
$$\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{8-5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}}=\frac{3}{\sqrt{574}}\ \Rightarrow\ \text{ángulo}(\vec{v},\ \vec{w})=\arccos\frac{3}{\sqrt{574}}=82{,}8^{\circ}.$$

- **Vectores ortogonales y vectores ortonormales**.

Dos vectores son ortogonales, perpendiculares, si su producto escalar vale cero.



Si dos vectores ortogonales tienen módulo 1, se llaman <u>ortonormales</u>.
Los vectores de módulo 1 se llaman <u>unitarios</u>. Para cualquier vector $\vec{a}$, el vector $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ es unitario.



Ejemplos:

a) Los vectores $\vec{a}$ = (1, –2, 5) y $\vec{b}$ = (3, –1, –1) son ortogonales, pues
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = (1, –2, 5) · (3, –1, –1) = 3 + 2 – 5 = 0.

b) Hay infinitos vectores perpendiculares a otro dado. Así, si $\vec{a}$ = (1, –2, 5), para que otro vector $\vec{b}=(x,y,z)$ sea perpendicular a él debe cumplirse que $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 0. Esto es:
(1, –2, 5) · $(x,y,z)=0\Rightarrow x-2y+5z=0$.
Algunos de esos vectores, que pueden determinarse por tanteo, son:
$\vec{b}_1$ = (5, 0, –1), $\vec{b}_2$ = (1, 3, 1) o $\vec{b}_3$ = (–3, 1, 1).

c) Podría plantearse el problema de encontrar el valor de k que hace que los vectores $\vec{v}$ = (–1, 2, k) y $\vec{w}$ = (2, k, –1) sean perpendiculares.
→ Debe cumplirse que $\vec{v}\cdot\vec{w}$ = (–1, 2, k) · (2, k, –1) = 0 ⇒ –2 + 2k – k = 0 ⇒ k = 2.

d) Dados los vectores $\vec{a}$ = (1, 0, 1) y $\vec{b}$ = (1, 1, –1), los vectores

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}\cdot(1,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{y}\ \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}\cdot(1,\ 1,\ -1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$$

son unitarios y ortogonales; por tanto, son ortonormales.

e) La base canónica, **B** = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}, es una base ortonormal, pues está formada por vectores unitarios, perpendiculares dos a dos.

5. Producto vectorial de vectores

5.1. Definición y propiedades del producto vectorial de vectores en $\mathbf{R^3}$

Dados dos vectores $\vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{w}=(a_2,b_2,c_2)$ su producto vectorial es el vector:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{u}_1-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{u}_2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\vec{u}_3.$$

siendo $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ los vectores de la base canónica.

Nota: Se escribe la expresión mediante un "determinante" por su facilidad de retención, pero en modo alguno es un determinante, ya que el determinante de una matriz es un número, mientras que el producto vectorial es un vector. En este caso sólo tiene sentido si se desarrolla por la primera fila.

Ejemplo:

Si $\vec{v}$ = (1, 1, –1) y $\vec{w}$ = (1, 2, 0), $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3=(2,-1,1)$.

- **Algunas propiedades**

1. $\vec{v}\times\vec{w}=-\vec{w}\times\vec{v}$.
2. $k(\vec{v}\times\vec{w})=(k\vec{v})\times\vec{w}=\vec{v}\times(k\vec{w})$), siendo k un escalar.
3. El vector $\vec{v}\times\vec{w}$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
4. El valor del módulo del producto vectorial vale: $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot|\text{sen}(\vec{v},\vec{w})|$.
5. Si $\vec{v}\times\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos (proporcionales, linealmente dependientes).
6. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ $\{\vec{v},\vec{w},\vec{v}\times\vec{w}\}$ forman base de $\mathbf{R^3}$.

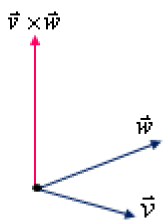
Comentario: La propiedad 4ª no es sencilla de demostrar; de hecho, algunas veces se utiliza en la definición, suponemos que para obviarla. La demostración de las demás propiedades es sencilla, basta con utilizar alguna propiedad de los determinantes y el producto escalar. Así, por ejemplo, la primera propiedad es consecuencia de que un determinante cambia el signo cuando se intercambian dos de sus filas.

Ejemplos:

a) Se ha visto más arriba que si $\vec{v}$ = (1, 1, –1) y $\vec{w}$ = (1, 2, 0) ⇒ $\vec{v}\times\vec{w}$ = (2, –1, 1).
Ahora puede verse que este vector es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$.
En efecto, multiplicándolos escalarmente, se tiene:

$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{v}$ = (2, –1, 1) · (1, 1, –1) = 2 – 1 – 1 = 0;

$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{w}$ = (2, –1, 1) · (1, 2, 0) = 2 – 2 + 0 = 0.



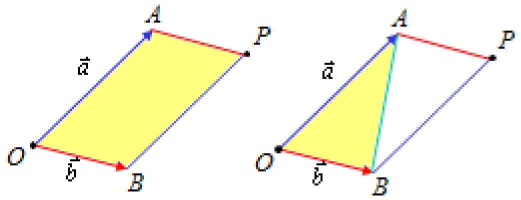
→ Esta propiedad permite obtener un vector perpendicular a dos vectores dados, entre otras aplicaciones.

b) También es fácil ver que los vectores $\vec{v}$ = (1, 1, –1), $\vec{w}$ = (1, 2, 0) y $\vec{v}\times\vec{w}$ = (2, –1, 1) son linealmente independientes, pues: $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=2-1+5\neq 0$.

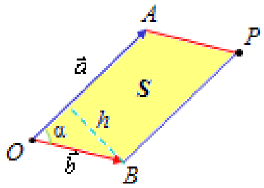
Hay infinitos vectores perpendiculares, a la vez, a $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Todos son de la forma $k\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

5.2. Aplicación del producto vectorial: áreas

El módulo del vector $\vec{a}\times\vec{b}$, es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Esto es: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ = área del paralelogramo *OAPB*.



Igualmente, $\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ = área del triángulo *OAB*, determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



<u>Justificación</u>: El área de un paralelogramo se halla multiplicando la longitud una de sus bases por la altura sobre ella. En la figura,

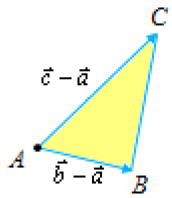
$$S=|\vec{a}|\cdot h=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\operatorname{sen}\alpha \text{ , pues } \operatorname{sen}\alpha=\frac{h}{|\vec{b}|}.$$

Por la propiedad 4 se sabe que $|\vec{v}\times\vec{w}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot|\operatorname{sen}(\vec{v},\vec{w})|$, luego, $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Ejemplos:

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ = (1, 2, 3) y $\vec{b}$ = (2, –1, 1) es el módulo del vector $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(5,5,-5)$.

Esto es: Área $=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{25+25+25}=5\sqrt{3}$ u^2.



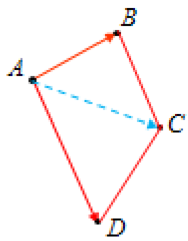
b) Dados los puntos *A*(1, 0, 1), *B*(2, 0, –1) y *C*(0, 1, 4), el área del triángulo que determinan, *ABC*, viene dada por $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Como:

$$\overrightarrow{AB}=(1,0,-2),\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,3)\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(2,\ -1,\ 1),$$

el área del triángulo *ABC* $=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ u^2.

c) Para determinar el área de un cuadrilátero (no necesariamente paralelogramo) se puede descomponer en dos triángulos. Así, si los vértices de un cuadrilátero son los anteriores *A*, *B*, *C* y *D*(2, –1, 1), su área es la suma de las áreas de los triángulos *ABC* y *ACD* .



Área del cuadrilátero *ABCD* $=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|+\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|$.

→ Para ver que el cuadrilátero no es un paralelogramo basta con ver que los vectores ***AB*** y ***DC*** no son equipolentes.

6. Producto mixto de vectores

6.1. Definición y propiedades

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, su producto mixto es un número real, que se designa por [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$], y se define como:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\,.$$

- Primero se hace el producto vectorial, después el escalar; en consecuencia, el resultado del producto mixto es un número real.

→ Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, el valor del producto mixto es:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{a}$ = (3, –1, 2), $\vec{b}$ = (1, –2, 1) y $\vec{c}$ = (0, 5, –4), su producto mixto vale:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (8 - 5) - 1 \cdot (4 - 10) = 9 + 6 = 15.$$

- **Algunas propiedades del producto mixto**

1. [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$] = [$\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$] = –[$\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$].
2. k · [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$] = [$k\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$], siendo k un escalar.
3. [$\vec{a}+\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$] = [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$] + [$\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$].
4. [$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$] = 0 $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes.

Todas estas propiedades se demuestran fácilmente aplicando las propiedades de los determinantes.

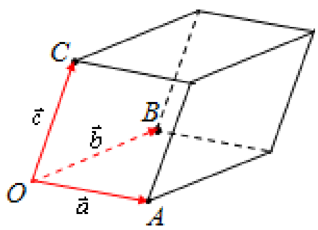
6.2. Aplicaciones del producto mixto: volúmenes

El valor absoluto del producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo determinado por esos vectores. Esto es:

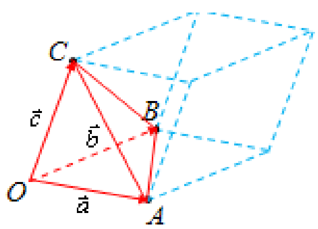
$V_P = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ = volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Como consecuencia, la sexta parte de ese valor da el volumen del tetraedro determinado por esos mismos vectores. Esto es:

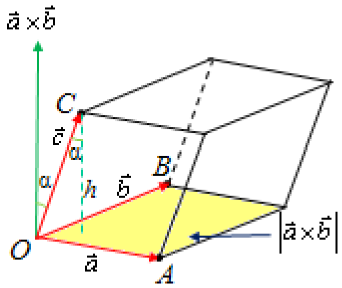
$V_T = \dfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$ = volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



Paralelepípedo



Tetraedro



Justificación:
El producto mixto:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\ =\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right).$$

Como $\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\cos\alpha=\dfrac{h}{\left|\vec{c}\right|}\Rightarrow h=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha$.

Por tanto, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h$; pero este producto da el valor del volumen de un paralelepípedo = área de la base por la altura.
Por tanto: $V_P=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$.

Para el tetraedro, cuyo volumen es $V_T=\dfrac{1}{3}\cdot(\text{área de la base por la altura})=\dfrac{1}{3}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h$, y puesto que su base es la mitad que la del paralelepípedo, se tendrá que:

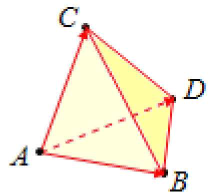
$$V_T=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot h\Rightarrow V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|.$$

Ejemplos:
a) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$ = (3, 1, 2), $\vec{b}$ = (–1, 2, 0) y $\vec{c}$ = (1, 5, –4) vale:

$$V_P=\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & -4\end{matrix}\right\| = \left|3\cdot(-8)-1\cdot4+2\cdot(-5-2)\right| = \left|-42\right| = 42\ \text{u}^3.$$

El volumen del tetraedro determinado por los mismos vectores será $V_T=\dfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|=7\ \text{u}^3$.

b) Los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, 1, 4)$ y $D(1, -2, 3)$, determinan el tetraedro de vértices $ABCD$.



El volumen de este tetraedro viene dado por $\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

Como $\overrightarrow{AB}$ = (1, 0, –2), $\overrightarrow{AC}$ = (–1, 1, 3) y $\overrightarrow{AD}$ = (0, –2, 2), su volumen es:

$$V_T=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\left|1\cdot12-2\cdot2\right|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\ \text{u}^3.$$

7. Ejercicios finales

Ejercicio 1
Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=17$ y $\left|\vec{u}\right|=9$.
Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.
Solución:
Haciendo el producto escalar:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot v+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2.$$

Por tanto: $17=9^2-\left|\vec{v}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{v}\right|^2=81-17=64\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=8$.

Ejercicio 2

Sean los vectores: $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, m)$ con $m \in \mathbf{R}$.

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.

b) Para $m = 0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 4) \cdot (0, 3, m) = -3 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$$

b) El área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ viene dada por el módulo del producto vectorial de los vectores dados: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Para $m = 0$, $\vec{b} = (0, 3, 0)$, luego

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-12,\ 0,\ 6) \Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 6^2} = \sqrt{180}.$$

El área del paralelogramo vale $\sqrt{180}$ u^2.

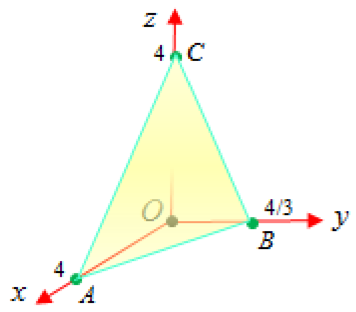
Ejercicio 3

Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4/3, 0)$ y $C = (0, 0, 4)$.

Solución:

El tetraedro es el representado en la figura adjunta. Sus vértices están situados sobre los ejes cartesianos.

Su volumen vendrá determinado por un sexto del producto mixto de los vectores ***OA***, ***OB*** y ***OC***, siendo ***OA*** = (4, 0, 0), ***OB*** = (0, 4/3, 0) y ***OC*** = (0, 0, 4)



Su valor es: $V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{64}{3} = \frac{32}{9}$ u^3.

Ejercicio 4

Calcula el área del triángulo de vértices $B = (1, 0, 1)$, $C = (2, 4, -2)$ y $D = (11, 0, 0)$.

Solución:

El área del triángulo de vértices B, C y D viene dada por el valor de $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right|$.

Como ***BC*** = (2, 4, –2) – (1, 0, 1) = (1, 4, –3) y ***BD*** = (11, 0, 0) – (1, 0, 1) = (10, 0, –1), se tiene que:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 10 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-4,\ -29,\ -40) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-29)^2 + (-40)^2} = \sqrt{2457} \to \text{El área pedida es } S = \frac{1}{2}\sqrt{2457} \text{ u}^2.$$

Problemas propuestos

Vectores

1. Para $\vec{a} = (1, -2, 3)$ y $\vec{b} = (3, -1, 4)$, halla:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $2\vec{a}-\vec{b}$ c) $-\vec{a}+3\vec{b}$ d) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

2. a) A partir de la definición de dependencia lineal de vectores, demuestra que los vectores $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ son linealmente independientes.
b) Expresa el vector $\vec{v} = (3, -2, 3)$ en función de los vectores anteriores.

3. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 0, -1)$ y $D(-1, 1, 1)$, halla los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD***. Comprueba si son linealmente dependientes o no. Da una interpretación geométrica del hecho.

4. Para los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD***, del ejercicio anterior, halla:
a) El módulo de cada uno de ellos.
b) El producto escalar ***AB*** · ***BC***.
c) El ángulo que forman ***AB*** y ***BC***.

5. Calcula los valores de a y b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ estén alineados.

6. Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores
$\vec{u} = (2, 0, 9)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$, $\vec{w} = (5, -1, 4)$

7. a) Estudia, en función del valor del parámetro a, la dependencia e independencia lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (a, -a, 1)$, $\vec{v}_2 = (2a, 1, 1)$ y $\vec{v}_3 = (1, -1, -1)$.
b) Cuando sean linealmente dependientes, escribe $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

8. Halla la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas $A(1, 0, 0)$, $B(a, b, 0)$, $C(a, 0, b)$ y $D(0, a, b)$ estén en un plano.

Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto

9. a) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.
b) ¿Cuánto debe valer a para que los vectores $\vec{u} = (2, a, 1)$ y $\vec{v} = (-1, a, 1)$ sean perpendiculares.

10. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(0, 0, -1)$, determina otro punto D de manera que $ABCD$ sean vértices consecutivos de un paralelogramo. Determina el punto de corte de sus diagonales y el área de ese paralelogramo.

11. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 0)$, calcula los vectores unitarios de $\mathbf{R}^3$ que son ortogonales a ambos.

12. Determina el valor de a para que los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 6, a)$ sean los vértices de un triángulo de área 3/2.

13. a) Demuestra que los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$ son vértices de un triángulo isósceles.
b) Para $\lambda = 2$ determina su área.
c) Para $\lambda = 0$, si los puntos A, B y C se trasladan según el vector $\vec{v} = (1, -1, 3)$ se obtiene un prisma triangular. Halla los nuevos vértices y el volumen del prisma.

14. (Propuesto en Selectividad, Madrid 2012)
Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

15. Dados los vectores: $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbf{R}$.
a) Halla el valor de λ para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
b) Para $\lambda = 0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

16. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 5, 3)$ y $D(-1, 4, 3)$.
a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano.
b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ es rectángulo.
c) Calcula el área de dicho rectángulo.

17. (Propuesto en EvAU 2018, Madrid)
Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:
a) Determinar un vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
b) Hallar un vector no nulo $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

Soluciones

1. a) (4, –3, 7). b) (–1, –3, 2). c) (8, –1, 9). d) $(\lambda + 3\mu, -2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu)$.

2. a) Lo son. b) $(3, -2, 3) = \frac{1}{2}\cdot(1, 0, -1) + \frac{1}{2}\cdot(0, 1, 2) + \frac{5}{2}\cdot(1, -1, 1)$.

3. Son l.i. No hay ningún plano que contenga a los cuatro puntos.

4. a) $\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. b) –4. c) 160,53º. **5**. $a = 1$; $b = 2$. **6**. Son l.i.

7. a) Si $a = -1$ o $-1/2$, l.d; $a \neq -1$ y $-1/2$ l.i. b) Si $a = -1$, $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1$; Si $a = -1/2$, $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$.

8. $a + b = 1$, con a y b distintos de 0. **9**. a) 90º. b) $a = \pm 1$.

10. $D = (-1, -1, -2)$. $M = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$. $\sqrt{2}$ u². **11**. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

12. $a = 4$ o $a = -2$. **13**. a) Lo son. b) 6 u². c) 6 u³.

14. a) $a = \frac{4}{3}$. b) $a = \frac{10}{3}$ o ; $a = -\frac{2}{3}$. **15**. a) $\lambda = \frac{3}{4}$. b) $\sqrt{180}$ u².

16. a) Lo están. b) Lo es. c) $\sqrt{24}$.

17. $\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$. b) (1, 2, 2). c) (0, 0, 0); (–2, 4, 6); (–2, 0, 1); (–4, 4, 7).